فصل ٦

سری های فوریه

سری های فوریه شاخه ای از آنالیز ریاضی است که نخستین بار در خلال مباحثی معین از معادلات دیفرانسیل جزئی دیده شد. این نوع از معادلات که سه قرن پیش مورد بحث قرار گرفت شامل مباحثی از انتقال موج در یک ریسمان و نیز انتشار گرما در یک میله فلزی بود که دانشمندان را متمایل ساخت تا شکل ریاضی این نوع پدیده های فیزیکی را تشریح نمایند. اولین مطالعات محاسباتی در این موضوع توسط اویلر[1] انجام گرفت و سپس ریاضیدانان دیگری مانند فوریه[2] و دیریکله[3] به تکامل آن پرداختند و طی سالهای بعد این نظریه شکل امروزی بخود گرفت. ایده سری های فوریه کاربردهایی منجمله در میدان های صوت و الکترومغناطیس، اپتیک، الاستیسیته، تحلیل طیفی تشعشع داشته و دامنه مباحث آن به مطالعات آکوستیک، هدایت گرمائی، امواج الکترومغناطیسی، نوسان (ارتعاشات) مکانیکی، فرآیند سیگنال و تحلیل تصویر نیز می رسد.

مانند ایدهٔ سری های توانی که یک تابع مفروض $f(x)$ را می توان تحت شرایطی بر حسب توابع مقدماتی $\{۱, x, x^۲, x^۳, \cdots\}$ بیان کرد، در اینجا نیز یک تابع $f(x)$ را می توان با شرایط خاصی بر حسب توابع مثلثاتی $\{۱, \cos kx, \sin kx\}_{k=۱}^{\infty}$ بیان نمود. از آنجا که توابع مثلثاتی متناوبند لذا تابع مورد نظر می بایست متناوب بوده و یا با تحدید به قسمتی از دامنهٔ خود، متناوب فرض شود تا بتوان از این نوع سری استفاده نمود. مانند بسط سریهای توانی که محدودیتهائی مانند هموار بودن تابع را در خود دارد بسط سری فوریه نیز با شرایط خاصی اجرا می گردد و با وجود این، بسط سری فوریه شامل طیف وسیعتری از توابع خواهد بود. بالاخره اینکه روش بسط

[1] *Leonhard Euler* (۱۷۰۷ – ۱۷۸۳)
[2] *Jean Baptiste Joseph Fourier* (۱۷٦۸ – ۱۸۳۰)
[3] *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (۱۸۰۵ – ۱۸۵۹)

سری فوریه، روشی توانمند در حل برخی معادلات دیفرانسیلی است.
ایده سری فوریه بر توابع متناوب استوار است. سری

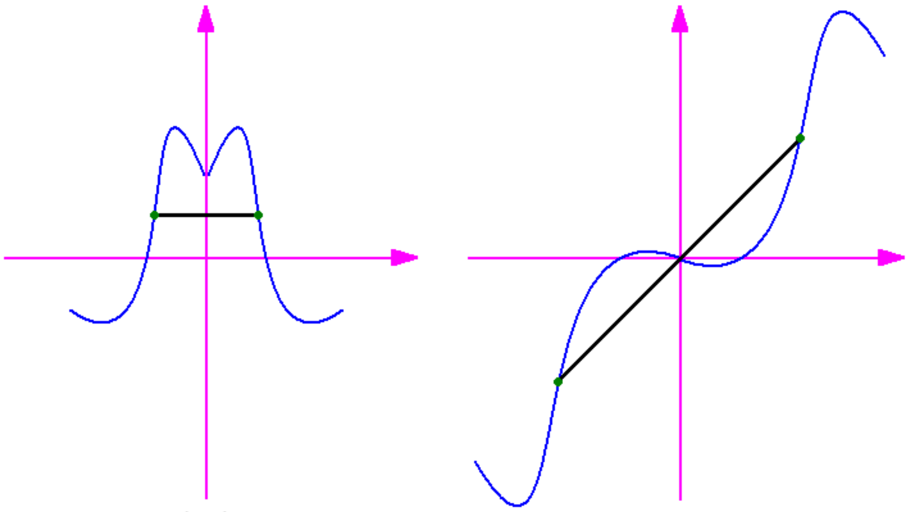
$$f(x) = A_۰ + \sum_{k=۱}^{\infty} \Big(A_k \cos kx + B_k \sin kx \Big) \qquad (۱)$$
$$= A_۰ + A_۱ \cos x + B_۱ \sin x + A_۲ \cos ۲x + B_۲ \sin ۲x + \cdots$$

را یک **سری مثلثاتی** گویند. یافتن ضرایب A_k و B_k چنانچه سری مثلثاتی (۱) برابر تابع $f(x)$ شود دارای دو نکته است: نخست اینکه چگونه برای تابع مفروضی مانند f ضرایب A_k و B_k محاسبه می شوند. سپس برای تابع f و سری محاسبه شدهٔ آن چگونه می‌بایست همگرائی طرف راست را بررسی نمود و این سری چه وقت همگرا به تابع f خواهد شد. در نهایت از سریهای فوریه و مثلثاتی برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده خواهیم کرد.

۱.٦ سری فوریه حقیقی

قبل از بیان سری فوریه لازم است به دو خاصیت مهم توابع اشاره کنیم. یکی خاصیت زوج و فرد بودن یک تابع و دیگری ویژگی مهم تناوب در یک تابع است. یادآوری نمائیم که تابع حقیقی f بر بازهٔ $[-L, L]$ زوج است اگر $f(x) = f(-x)$ و فرد است اگر $f(x) = -f(-x)$. حاصلجمع دو تابع زوج، تابعی زوج و حاصلجمع دو تابع فرد، تابعی فرد است. همچنین حاصلضرب دو تابع زوج یا دو تابع فرد، تابعی زوج بوده درحالیکه حاصلضرب یک تابع زوج در تابعی فرد، تابعی فرد است.

مثال ۱.٦ توابع $\sin x$، x، $x^۳$، $x^۵$ فرد و توابع $\cos x$، $x^۲$، $x^۴$، $x^٦$ زوجند. همچنین توابعی مانند $x \cos x$، $\tan x$، $\cot x$ فرد و توابع $x \sin x$ و $e^{-x^۲}$ زوجند. تابع $x + \cos x$ نه زوج است و نه فرد.



شکل ۱.٦ (الف) نمودار تابع زوج نسبت به محور عرضها متقارن و (ب) نمودار تابع فرد نسبت به مبداء مختصات متقارن است.

از دید هندسی، نمودار یک تابع زوج نسبت به محور عرضها متقارن است (شکل۱.٦ الف) و نمودار تابع فرد، نسبت به مبداء مختصات متقارن می باشد (شکل۱.٦ ب).

مثال ۲.٦ برای تابع زوج روی بازهٔ $[-L, L]$ همواره $\int_{\circ}^{L} f(x)dx$ ۲ $= \int_{-L}^{L} f(x)dx$ و برای تابع فرد روی بازهٔ $[-L, L]$ همیشه رابطهٔ $\int_{-L}^{L} f(x)dx = \circ$ برقرار است.

تابع $y = f(x)$ متناوب با دورهٔ تناوب $T > \circ$ است اگر بازاء هر x در دامنهٔ تعریف تابع داشته باشیم $f(x+T) = f(x)$. می توان ثابت کرد که حاصلجمع و حاصلضرب دو تابع متناوب، تابعی متناوب است. برای توابع متناوب sin و cos با دورهٔ تناوب $T = ۲\pi$ فرمولهای زیر بازای m, n–های طبیعی برقرارند:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}\cdot dx = \begin{cases} L & m = n, \\ \circ & m \neq n. \end{cases} \\
&\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cdot\cos\frac{n\pi x}{L}\cdot dx = \begin{cases} L & m = n, \\ \circ & m \neq n. \end{cases} \\
&\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}\cdot dx = \circ \quad , \quad \forall m, n \qquad (۲) \\
&\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cdot dx = \circ \\
&\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cdot dx = \circ
\end{aligned}
$$

این روابط عملاً محاسبات را کوتاهتر خواهند نمود.

۱.۱.٦ تعریف

تعریف ۱.٦ فرمول اویلر–فوریه برای تابع $y = f(x)$ با دورهٔ تناوب $T = ۲L$ چنین تعریف می شود:

$$f(x) = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (۳)$$

$$= \quad \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos\frac{\pi x}{L} + b_1 \sin\frac{\pi x}{L}) + (a_2 \cos\frac{2\pi x}{L} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{L}) + \cdots$$

که برای هر n طبیعی ضرایب a_0 و a_n و b_n چنین تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \end{aligned} \qquad (۴)$$

بنابراین برای یافتن سری فوریه کافیست تابع را در بازهٔ $-L \le x \le L$ در نظر بگیریم، بدین ترتیب با یافتن ضرایب[۴] فوریهٔ (۴) و طبق تناوب، سری (۳) را برای x–های حقیقی تعریف خواهیم کرد. واضح است که برای محاسبهٔ ضرایب باید تابع $f(x)$ را پیوسته و یا آنچنان که خواهیم دید تکه‌ای پیوسته فرض نمود. متداول و مرسوم است که در مطالعهٔ سریهای فوریه، تصور کنیم که تابع $f(x)$ روی کل خط حقیقی تعریف شده است. پس هر تابع f که روی $[-L, L]$ تعریف شده را می توان روی کل خط حقیقی با استفاده از تناوب گسترش داد. مثالهای ساده‌ای مانند توابع مثلثاتی $\sin x$ و $\cos x$ نشان می دهند که سری حاصل در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ روی محور قابل گسترش است. همچنین برای هر تابع متناوب f که روی $[-L, L]$ تعریف شده می توان تعریف نمود $f(-L) = f(L)$ یا $f(2L) = f(0)$ و در نقاط ناپیوستگی مقدار سری عبارتست از $\frac{f(0+) + f(0-)}{2}$.

---

[۴]– این ضرایب چنین بدست می آیند. با ضرب طرفین (۳) در $\cos\frac{m\pi x}{L}$ بازای m–طبیعی دلخواه و سپس انتگرال از طرفین روی $[-L, L]$ داریم

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}\cos\frac{m\pi x}{L}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L}(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L})\cos\frac{m\pi x}{L}dx$$

که جابجائی جمعبند و انتگرال توسط فرض همگرائی یکنواخت سری امکانپذیر است. طبق فرمولهای (۲) برای $m \neq n$ حاصل انتگرالها صفر شده و تنها برای حالت $m = n$ جملهٔ La_m باقی مانده و

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = La_m$$

روند مشابه نیز برای $\sin\frac{m\pi x}{L}$ مشخص می کند که $\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx = Lb_m$. برای محاسبهٔ a_0 می نویسیم:

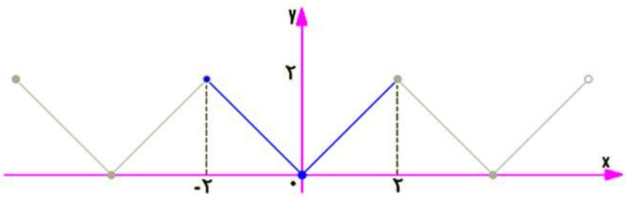
$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L}(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L})dx = 2L$$

به ضرایب a_m و b_m **ضرایب اویلر** گویند.

مقدار $\frac{a_۰}{۲}$ در واقع متوسط تابع بر بازهٔ $-L \leq x \leq L$ است.

مثال ۳.٦ مطلوبست سری فوریه تابع $f(x)$ با $T = ۴$ در بازهٔ $-۲ \leq x \leq ۲$ بصورت زیر

$$f(x) = \begin{cases} -x & -۲ \leq x < ۰, \\ x & ۰ \leq x < ۲. \end{cases}$$



شکل ۲.٦ نمودار موج مثلثی تابع مثال ۳.٦

حل. نمودار این تابع بصورت موج مثلثی است. ابتدا ضرایب فوریهٔ (۴) را با $L = ۲$ محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} a_۰ &= \frac{۱}{۲}\int_{-۲}^{۲} f(x)dx = \frac{۱}{۲}\int_{-۲}^{۰} -xdx + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲} xdx = ۲ \\ a_n &= \frac{۱}{۲}\int_{-۲}^{۲} f(x)\cos\frac{n\pi x}{۲}dx = -\frac{۱}{۲}\int_{-۲}^{۰} x\cos\frac{n\pi x}{۲}dx + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲} x\cos\frac{n\pi x}{۲}dx \\ &= \begin{cases} \frac{-۸}{n^۲\pi^۲} & \text{فرد } n, \\ ۰ & \text{زوج } n. \end{cases} \\ b_n &= \frac{۱}{۲}\int_{-۲}^{۲} f(x)\sin\frac{n\pi x}{۲}dx = -\frac{۱}{۲}\int_{-۲}^{۰} x\sin\frac{n\pi x}{۲}dx + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲} x\sin\frac{n\pi x}{۲}dx = ۰ \end{aligned}$$

با جایگذاری در (۳) داریم:

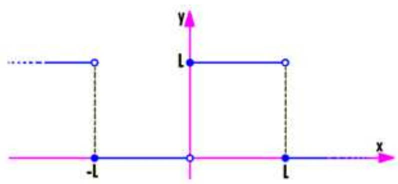
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= ۱ + \sum_{n=۱,۳,\cdots}^{\infty}\left(\frac{-۸}{n^۲\pi^۲}\cos\frac{n\pi x}{۲} + ۰\right) \\ &= ۱ - \frac{۸}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲}\cos(۲n-۱)\frac{\pi x}{۲} \\ &= ۱ - \frac{۸}{\pi^۲}\left(\cos\frac{\pi x}{۲} + \frac{۱}{۳^۲}\cos\frac{۳\pi x}{۲} + \frac{۱}{۵^۲}\cos\frac{۵\pi x}{۲} + \cdots\right) \end{aligned}$$

مثال ۴.٦ موج مربعی با تابع زیر که دورهٔ تناوب آن $T = \text{۲}L$ خواهد بود، در بازهٔ $[-L, L]$ را در نظر گرفته و سری فوریهٔ آنرا بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} \text{۰} & -L \leq x < \text{۰}, \\ L & \text{۰} \leq x < L. \end{cases}$$

حل. نمودار این تابع بصورت موج مربعی بوده (شکل۳.٦) و برای ضرایب فوریه داریم:

$$\begin{aligned}
a_\text{۰} &= \frac{\text{۱}}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_\text{۰}^{L} dx = L \\
a_n &= \frac{\text{۱}}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \int_\text{۰}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}dx = \text{۰} \\
b_n &= \frac{\text{۱}}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \int_\text{۰}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}dx \\
&= \frac{L}{n\pi}(\text{۱} - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{\text{۲}L}{n\pi} & \text{فرد } n, \\ \text{۰} & \text{زوج } n. \end{cases} \\
f(x) &= \frac{a_\text{۰}}{\text{۲}} + \sum_{n=\text{۱}}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= \frac{L}{\text{۲}} + \frac{\text{۲}L}{\pi}\sum_{n=\text{۱},\text{۳},\cdots}^{\infty}\left(\frac{\text{۱}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= \frac{L}{\text{۲}} + \frac{\text{۲}L}{\pi}\sum_{n=\text{۱}}^{\infty}\frac{\text{۱}}{\text{۲}n - \text{۱}}\sin(\text{۲}n - \text{۱})\frac{\pi x}{L} \\
&= \frac{L}{\text{۲}} + \frac{\text{۲}L}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\sin\frac{\text{۳}\pi x}{L} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\sin\frac{\text{۵}\pi x}{L} + \cdots\right)
\end{aligned}$$



شکل ۳.٦ نمودار موج مربعی تابع مثال ۴.٦

مطلب مهمی که عملاً مفید است آنست که

قضیه ۱.٦ سری فوریه تابع زوج f با دوره تناوب $\text{۲}L$ یک **سری فوریه کسینوسی** بصورت

$$f(x) = \frac{a_\text{۰}}{\text{۲}} + \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$$

است که برای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$،

$$a_n = \frac{۲}{L}\int_۰^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

زیرا در این حالت تابع $f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ فرد و مقدار b_n صفر خواهد بود. بهمین ترتیب سری فوریه تابع فرد f با دوره تناوب $۲L$ یک **سری فوریه سینوسی** بصورت

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

است که برای $n = ۱, ۲, \ldots$،

$$b_n = \frac{۲}{L}\int_۰^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

زیرا در حالتیکه تابع $f(x)$ فرد است، تابع $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ فرد و مقادیر a_n–ها صفر و سری سینوسی است. در مثال ۳.٦ تابع زوج بوده و چنانکه دیدیم مقدار b_n صفر و سری کسینوسی بود. در مثال ۴.٦ نیز تابع فرد بود و مقدار a_n صفر بوده است.

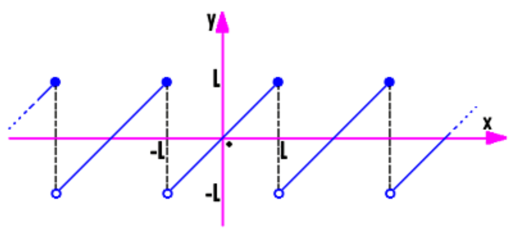
مثال ۵.٦ سری فوریه تابع $f(x) = x$ را با دوره تناوب $T = ۲L$ در بازهٔ $[-L, L]$ بیابید.

حل. نمودار این تابع بصورت موج دندان ارّه‌ای است. چون تابع در بازهٔ $[-L, L]$ فرد است سری سینوسی بوده، برای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$، $a_n = ۰$ و برای ضرایب b_n داریم:

$$b_n = \frac{۱}{L}\int_{-L}^{L} x\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{۲L}{n\pi}(-۱)^{n+۱}$$

بنابراین سری فوریه بصورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{۲L}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$$



شکل ۴.٦ نمودار موج دندان اره‌ای تابع مثال ۵.٦

مثال ٦.٦ سری فوریهٔ تابع $f(x)$ با $T=۴$ در بازهٔ $[-۲,۲]$ با $L=۲$ بصورت زیر را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & -۲\le x<\circ, \\ ۲-x & \circ\le x\le ۲. \end{cases}$$

با کمک سری یافته شده مقدار سری $S=۱+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۵^۲}+\cdots$ را تعیین نمائید.

حل. نمودار تابع نوعی موج مثلثی است. چون تابع زوج است پس $b_n=\circ$ (برای هر n) و با جایگذاری نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} a_\circ &= \frac{۱}{۴}\int_{-۲}^{۲} f(x)dx=\frac{۱}{۴}\int_{-۲}^{\circ}(x+۲)dx+\frac{۱}{۴}\int_{\circ}^{۲}(۲-x)dx=۱ \\ a_n &= \frac{۱}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{۱}{۲}\int_{-۲}^{\circ}(x+۲)\cos\frac{n\pi x}{۲}dx+\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{۲}(۲-x)\cos\frac{n\pi x}{۲}dx=\begin{cases} \frac{۸}{n^۲\pi^۲} & \text{فرد } n, \\ \circ & \text{زوج } n. \end{cases} \\ f(x) &= ۱+\frac{۸}{\pi^۲}\Big(\cos\frac{\pi x}{۲}+\frac{۱}{۹}\cos\frac{۳\pi x}{۲}+\frac{۱}{۲۵}\cos\frac{۵\pi x}{۲}+\cdots\Big) \end{aligned}$$

سری عددی مورد نظر S بازای $x=\circ$ در سری فوریه حاصل می شود پس

$$f(\circ)=۲=۱+\frac{۸}{\pi^۲}\Big(۱+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۵^۲}+\cdots\Big)$$

و مقدار سری برابر است با $S=\frac{\pi^۲}{۸}$.

مطلب ۱.٦ در حالت خاص که دوره تناوب تابع $T=۲\pi$ بوده و تابع را در فاصلهٔ $[-\pi,\pi]$ در نظر بگیریم، سری فوریه f بصورت

$$f(x)=\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (۵)$$

ساده شده و ضرایب فوریه a_n و b_n از فرمول های زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad ; \quad n=\circ,۱,۲,\cdots \\ b_n &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \quad ; \quad n=۱,۲,\cdots \end{aligned}$$

برای تابع متناوبی مانند $y=f(x)$ با دورهٔ تناوب $T=۲\pi$ فرمولهای زیر برای m,n–های طبیعی برقرارند:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\cdot dx=\begin{cases} \pi & m=n, \\ \circ & m\neq n. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \cdot dx = \begin{cases} \pi & m = n, \\ ۰ & m \neq n. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx \cdot dx = ۰ \quad , \quad \forall m, n \tag{٦}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot dx = ۰$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot dx = ۰$$

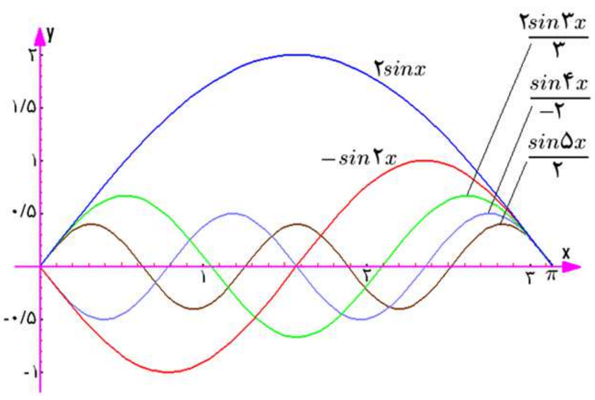
مثال ۷.٦ مطلوبست سری فوریه تابع $y = x$ در فاصلهٔ $[-\pi, \pi]$.

حل. این تابع همان تابع مثال۵.٦ است که در آن $L = \pi$. جدا از جواب موجود با روش مستقیم گوئیم که چون تابع فرد است پس برای $n = ۰, ۱, ۲, \cdots$ داریم $a_n = ۰$ و سپس

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \frac{۲}{\pi} \Big[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{۱}{n^۲} \sin nx \Big]_{۰}^{\pi} \\ &= \frac{۲}{\pi} \frac{(-۱)^{n+۱}\pi}{n} \\ &= \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n} \end{aligned}$$

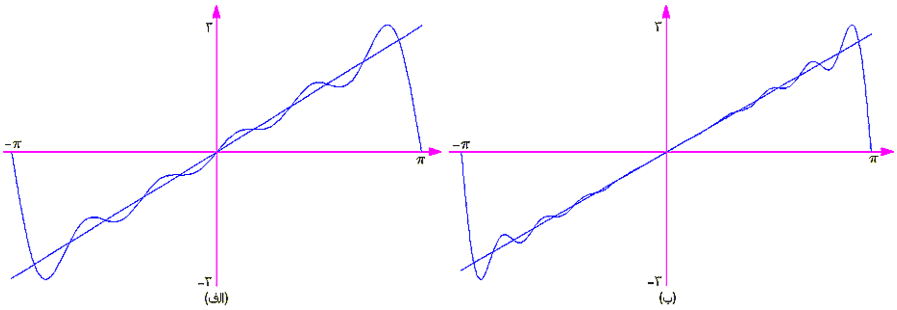
و جواب عبارتست از

$$f(x) = ۲\Big[\sin x - \frac{\sin ۲x}{۲} + \frac{\sin ۳x}{۳} - \frac{\sin ۴x}{۴} + \cdots\Big] \tag{۷}$$



شکل ۵.٦ نمودار مثال ۷.٦

در شکل فوق منحنی جملات $\text{۲} \sin x$ و $-\frac{\text{۲} \sin \text{۲}x}{\text{۲}}$ و $\frac{\text{۲} \sin \text{۳}x}{\text{۳}}$ و $-\frac{\text{۲} \sin \text{۴}x}{\text{۴}}$ و $\frac{\text{۲} \sin \text{۵}x}{\text{۵}}$ از سری (۷) را نشان می دهد. حاصلجمع این جملات تا بی نهایت برابر تابع $f(x) = x$ است. در شکل زیر مجموع پنج جمله از سری (شکل الف) و مجموع ده جمله از سری (شکل ب) نشان داده شده است.



شکل ٦.٦ مجموع چند جمله از سری (۷) که تا حدودی به تابع اصلی نزدیک می شود.

مثال ۸.٦ مطلوبست سری فوریه تابع موج مربعی زیر در فاصلهٔ $[-\pi, \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} -\text{۱} & -\pi \leq x < \text{۰}, \\ \text{۱} & \text{۰} \leq x < \pi. \end{cases}$$

حل. این تابع فرد است و برای $n = \text{۰}, \text{۱}, \text{۲}, \ldots$ داریم $a_n = \text{۰}$. همچنین

$$b_n = \frac{\text{۲}}{\pi} \int_{\text{۰}}^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{\text{۲}}{\pi} \Big[-\frac{\text{۱}}{n} \cos nx \Big]_{\text{۰}}^{\pi} = \frac{\text{۲}}{\pi} \frac{-(-\text{۱})^n + \text{۱}}{n} = \begin{cases} \frac{\text{۴}}{n\pi} & n \text{ فرد}, \\ \text{۰} & n \text{ زوج}. \end{cases}$$

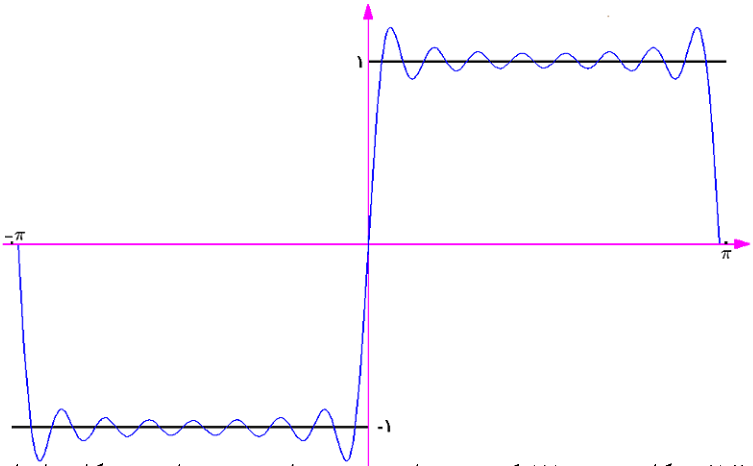
و سری فوریه آن عبارتست از

$$f(x) = \frac{\text{۴}}{\pi} \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \frac{\sin(\text{۲}n - \text{۱})x}{\text{۲}n - \text{۱}} \qquad (\text{۸})$$

در شکل۷.٦ منحنی این سری برای هشت جمله رسم شده است.

$$f(x) = \frac{\text{۴}}{\pi} \Big[\sin x + \frac{\sin \text{۳}x}{\text{۳}} + \frac{\sin \text{۵}x}{\text{۵}} + \frac{\sin \text{۷}x}{\text{۷}} + \frac{\sin \text{۹}x}{\text{۹}} + \frac{\sin \text{۱۱}x}{\text{۱۱}} + \frac{\sin \text{۱۳}x}{\text{۱۳}} + \frac{\sin \text{۱۵}x}{\text{۱۵}} \Big]$$

توضیح اینکه مکانهائی از نمودار فوق که نقاط تیز و لبه بوده و سری فوریه با تابع اصلی متفاوت است و معمولاً در نقاط انتهائی و گوشه ها دیده می شوند، نقاط جالبی اند. در موسیقی این نقاط همان نویز[۵] و هیس[٦] ها خواهند بود. جهت رفع مشکل در ادوات موسیقی، فیلترهائی ساخته شده که با تحلیل فوریه قادر به حذف این محصول (مصنوع) شده اند.



شکل ۷.٦ شکل منحنی (۸) که سری برای هشت جمله رسم شده است. شکل حاصل از این تعداد جملات سری تا حدودی به تابع اصلی نزدیکند.

مثال ۹.٦ سری فوریه تابع زیر را در فاصلهٔ $[-\pi, \pi]$ بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} x - ۱ & -\pi \le x < ۰, \\ x + ۱ & ۰ \le x < \pi. \end{cases}$$

حل. از آنجا که این تابع حاصلجمع دو تابع بصورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi \le x < ۰ \\ x & ۰ \le x < \pi \end{cases} + \begin{cases} -۱ & -\pi \le x < ۰ \\ ۱ & ۰ \le x < \pi \end{cases} = x + \begin{cases} -۱ & -\pi \le x < ۰, \\ ۱ & ۰ \le x < \pi. \end{cases}$$

طبق مثالهای ۷.٦ و ۸.٦ سری فوریه عبارتست از

$$\begin{aligned} f(x) &= ۲\left[\sin x - \frac{\sin ۲x}{۲} + \frac{\sin ۳x}{۳} - \frac{\sin ۴x}{۴} + \cdots\right] \\ &+ \frac{۴}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin ۳x}{۳} + \frac{\sin ۵x}{۵} + \frac{\sin ۷x}{۷} + \cdots\right] \\ &= (۲ + \frac{۴}{\pi})\left[\sin x + \frac{\sin ۳x}{۳} + \frac{\sin ۵x}{۵} + \frac{\sin ۷x}{۷} + \frac{\sin ۹x}{۹} + \cdots\right] \\ &- \left[\frac{\sin ۲x}{۱} + \frac{\sin ۴x}{۲} + \frac{\sin ٦x}{۳} + \frac{\sin ۸x}{۴} + \cdots\right] \end{aligned}$$

---
[۵] *Noise*
[٦] *Hiss*